Die Geometrie der griechischen Antike als Quelle für einen lebendigen Mathematikunterricht

Manfred Kronfellner, Wien

Beim Studium der Geschichte der Mathematik des antiken Griechenland stößt man an vielen Stellen auf Inhalte, die in einen engen Bezug zur Schulmathematik gebracht werden können. All diese Bezüge (nebst Unterrichtsvorschlägen) anzuführen würde ein ganzes Buch füllen. Im beschränkten Rahmen dieses Aufsatzes kann nur Weniges ausführlicher dargelegt werden, weitere mögliche Anknüpfungspunkte können nur schlagwortartig angerissen werden.

Um eine möglichst unmittelbare Verwendung im Unterricht zu erleichtern, soll die nachfolgende Darstellung nicht dem chronologischen Ablauf der Geschichte folgen, sondern sich weitgehend am AHS-Lehrplan orientieren. Ziel des Aufsatzes ist anzuregen, an passenden Stellen auch historische Problemstellungen zu erwähnen und durch einige begleitende Worte den Schülern nach und nach einen – wenn auch kleinen und bruchstückhaften – Einblick in die Entwicklung der Mathematik zu geben. Zu weiteren Möglichkeiten des Einbaus historischer Aspekte im Mathematikunterricht siehe KRONFELLNER (1997) und (1998).

2. Klasse

2.1 Der Satz von Thales

Thales von Milet (624? – 548? v. Chr.) gilt als der Begründer der wissenschaftlichen Mathematik, da er sich nicht mit dem Akzeptieren funktionierender Verfahren (wie dies etwa bei den Babyloniern oder Ägyptern üblich war) begnügte, sondern nach allgemeingültigen Begründungen suchte. Ihm werden neben dem nach ihm benannten Satz auch noch folgende Erkenntnisse (incl. Begründungen bzw. Beweise) zugeschrieben, auch wenn es keine direkt auf Thales zurückgehenden schriftlichen Aufzeichnungen darüber gibt:

- Scheitelwinkel sind gleich groß.
- Jeder Durchmesser teilt einen Kreis in zwei gleiche Teile.
- Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.
- Bei einem gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.

Diese Erkenntnisse versucht man in einer einzigen Figur, der sogenannten Thaletischen Grundfigur, zusammenzufassen. (Abb. 2.1)

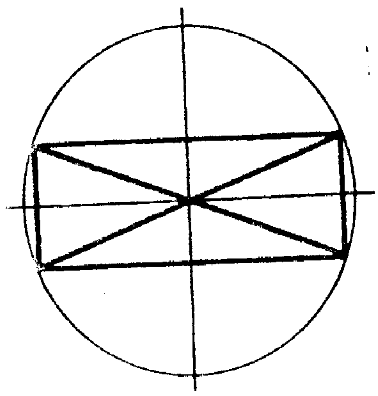


Abb. 2.1

2.2 Prismen, Pyramiden – Platonische Körper

Bei der Behandlung von Quadern und Pyramiden werden in der Schule auch „regelmäßige“ Körper wie Würfel und Tetraeder besprochen. Dabei könnte man auch die Aufmerksamkeit auf folgende Eigenschaften richten: Sie sind jeweils von einem regelmäßigen Viereck (Quadrat) bzw. einem regelmäßigen (d.h. gleichseitigen) Dreieck begrenzt, und in jeder Ecke kommen die gleiche Anzahl von Kanten und Flächen zusammen. Keine Ecke ist also vor einer anderen ausgezeichnet. In dieser Unterrichtseinheit sollte auch erwähnt werden, dass es noch weitere solche regelmäßigen Körper, auch Platonische Körper genannt, gibt. Man kann durchaus in der zweiten Klasse schon beweisen, dass es nicht mehr als fünf Platonische Körper geben kann. Dazu formen wir einen Teil des Netzes solcher Körper:

Drei gleichseitige Dreiecke (Abb. 2.2) können zu einem Tetraeder vervollständigt werden:

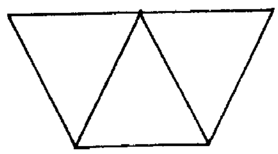


Abb. 2.2

Vier gleichseitige Dreiecke (Abb. 2.3) liefern vorerst eine quadratische Pyramide, also keinen regelmäßigen Körper; aber durch Verdoppeln erhält man ein Oktaeder.

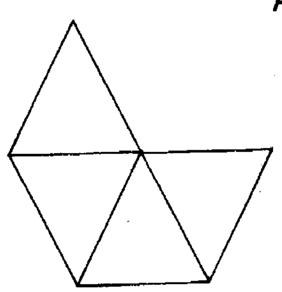


Abb. 2.3

Dass man fünf gleichseitige Dreiecke (Abb. 2.4) tatsächlich durch Hinzufügen von weiteren solchen Dreiecken zu einem Platonischen Körper, dem aus 20 Dreiecken bestehenden Ikosaeder (vgl. Abb. 2.7) vervollständigen kann, ist natürlich nicht so unmittelbar einzusehen, kann aber durch Herstellen eines Faltmodells plausibel gemacht werden.

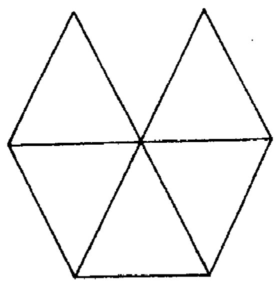


Abb. 2.4

Sechs gleichseitige Dreiecke bilden ein flaches Sechseck, d.h. es kann keinen Körper geben, in dessen Ecken sechs gleichseitige Dreiecke zusammenstoßen. Fahren wir fort mit dem „nächsten“ regelmäßigen Polygon, dem Quadrat. Drei Quadrate (Abb.2.5) bilden eine Ecke eines Würfels;

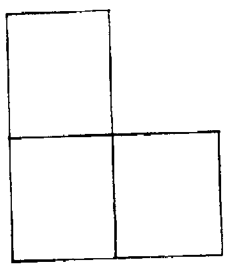


Abb. 2.5

vier Quadrate ergeben – ähnlich wie zuvor die sechs Dreiecke – kein räumliches Gebilde.

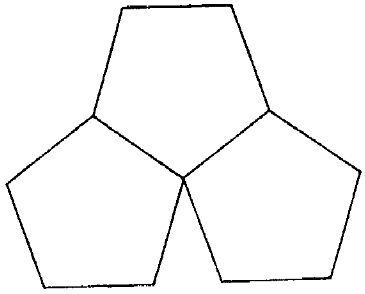


Abb. 2.6

Aus drei regelmäßigen Fünfecken (Abb. 2.6) kann man, wie man sich – wie beim Ikosaeder – durch Vervollständigung des Netzes vor Augen führen kann, ebenfalls einen Platonischen Körper, das Dodekaeder, aufbauen. Vier Fünfecke bzw. drei Sechsecke bzw. Polygone mit größerer Eckenzahl sind nicht möglich. Also gibt es fünf Platonische Körper.

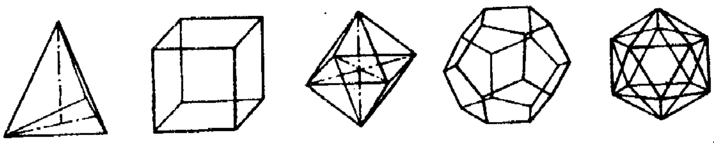
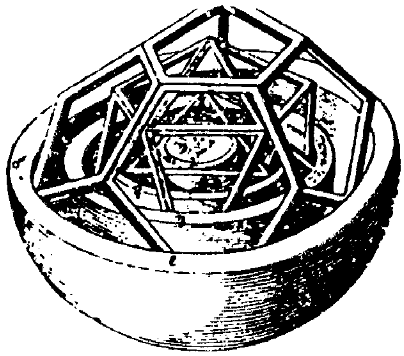


Abb. 2.7

Diesen Platonischen Körpern sowie auch anderen Regelmäßigkeiten von Zahlen und Figuren (vgl. später!) wurde oft eine geradezu mystische Bedeutung beigemessen. So versuchte etwa Johannes Kepler die Durchmesser der Planetenbahnen durch ineinandergeschachtelte Platonische Körper zu erklären. (Abb. 2.8)



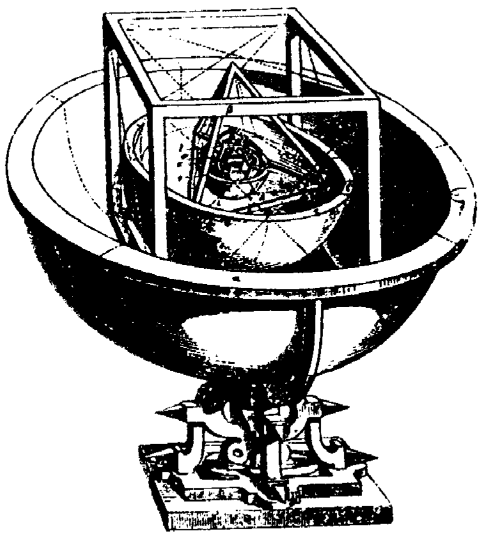


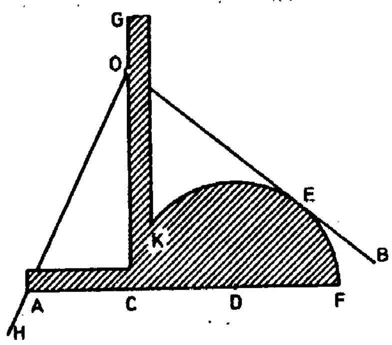
Abb. 2.8

2.3 Winkel – Winkeldreiteilung

Auch wenn das konstruktive Element im Geometrieunterricht im Abnehmen begriffen ist, das Halbieren eines Winkels mit Zirkel und Lineal sollte doch noch Bestandteil des Unterrichts sein. Durch weiteres Halbieren kann der Winkel in vier gleiche Teile geteilt werden. Hier drängt sich die Frage auf: Kann man einen Winkel konstruktiv, d.h. mit Zirkel und Lineal, auch in drei gleiche Teile teilen? Dieses Problem ist eines der drei sogenannten „klassischen Probleme der Antike“.

(Die anderen beiden sind die Würfelverdoppelung und die Quadratur des Kreises; siehe 4. Klasse!)
Heute wissen wir, dass das Problem der Winkeldreiteiung nicht mit Zirkel und Lineal exakt lösbar ist. Näherungskonstruktionen sowie „Konstruktionen" mit anderen Hilfsmitteln wurden aber mehrere gefunden.

2.3.1 So ersannen die Griechen etwa ein „Gerät", das mit einiger Phantasie einem Tomahawk ähnelt. Dieses wird so in einen gegebenen Winkel eingepasst, dass der Scheitel O auf dem „Griff" CG liegt, ein Schenkel durch A geht und der andere Schenkel den Halbkreis berührt. Dann gilt wegen der Kongruenz der Dreiecke ACO, OCD und ODE:



$$\measuredangle AOC = \measuredangle COD = \measuredangle DOE$$

$$\Rightarrow \measuredangle AOB = \measuredangle AOC + \measuredangle COD + \measuredangle DOE$$

Abb. 2.9

$$\Rightarrow \measuredangle AOB = 3.\measuredangle AOC \text{ bzw. } \measuredangle AOC = 1/3.\measuredangle AOB$$

2.3.2 Auch die folgende Konstruktion ist nicht so, wie sie sich die Griechen gewünscht hätten. Gegeben sei $\measuredangle ABC$. Man errichtet das Lot AD von A auf BC. Weiters zieht man durch A eine Parallele g zu BC. Nun legt man man ein Lineal, auf dem zweimal die Länge der Strecke AB abgetragen ist ($\overline{EG} = \overline{GF} = \overline{AB}$), so durch den Scheitel B, dass E auf AD und F auf G liegt. Dann gilt:

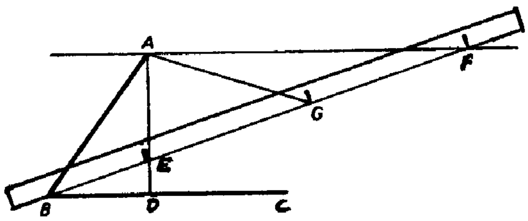


Abb. 2.10

$$\measuredangle ABE = \measuredangle EGA = \measuredangle GAF + \measuredangle AFG = 2.\measuredangle AFG = 2.\measuredangle EBC$$

$$\Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle ABE + \measuredangle EBC = 2.\measuredangle EBC + \measuredangle EBC = 3.\measuredangle EBC$$

$$\Rightarrow \measuredangle EBC = 1/3.\measuredangle ABC$$

2.3.3 Auch der folgenden Methode liegen ähnliche Überlegungen zugrunde: Gegeben ist $\measuredangle ADE$. Ein Lineal, auf dem die Länge der Strecke DB markiert ist, wird so durch A gelegt, dass ein Endpunkt der markierten Strecke auf dem Kreis, der andere auf der Verlängerung des Schenkels ED liegt. Ähnlich wie oben überlegt man nun leicht, dass $\measuredangle ADE = 3.\measuredangle BDC$ ist.

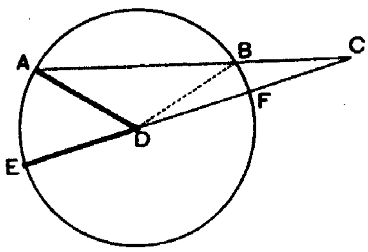


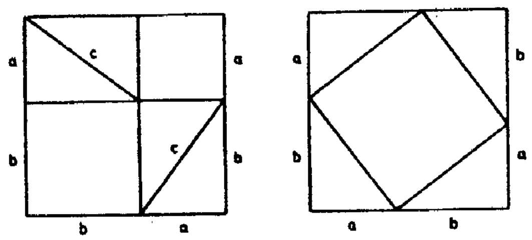
Abb. 2.11

3. Klasse

3.1 Der Pythagoräische Lehrsatz

Zu Pythagoras von Samos (580? – 500? v. Chr.) gibt es eine Menge Interessantes zu erzählen. Er verließ seine Heimat wegen der damals dort herrschenden unsicheren politischen Situation und gelangte nach langen Wanderjahren, die ihn nach Ägypten und Babylon geführt hatten, nach Kroton, einer Stadt in einer griechischen Kolonie in Süditalien. Dort gründete er einen religiös-philosophisch-wissenschaftlichen sektenartigen Geheimbund. Die Mitglieder lebten vegetarisch, glaubten an Seelenwanderung und traten für Selbstbeherrschung und kollektive Disziplin ein. Sie praktizierten Güterteilung, und auch die wissenschaftlichen Erkenntnisse wurden nicht ihrem Entdecker zugeschrieben, sondern als Gemeingut betrachtet. Daher stammt wohl nicht alles, was Pythagoras zugeschrieben wird, von ihm persönlich.

Der folgende Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes soll aber auf Pythagoras zurückgehen:



Durch Wegnehmen der vier rechtwinkeligen Dreiecke bleibt links a^2+b^2 und rechts c^2 übrig.

Abb. 3.1

Im Buch LOOMIS (1968) sind an die 300 Beweise dieses Lehrsatzes gesammelt.

Der folgende Beweis stammt von EUKLID (365? – 300? v. Chr).

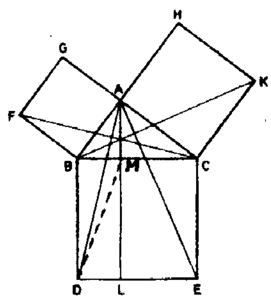


Abb. 3.2

$\triangle ABD \cong \triangle FBC$

$\triangle BMD = \triangle BAD$ (das Zeichen '=' steht für 'flächengleich')

$\square$ BMLD = 2.$\triangle$BAD

analog: $\square$ BAGF = 2.$\triangle$FBC = 2.$\triangle$BAD

$\Rightarrow$ $\square$ BAGF = $\square$ BMLD

analog: $\square$ ACKH = $\square$ LECM

$\Rightarrow$ $\square$ BAGF + $\square$ ACKH = $\square$ BMLD + $\square$ LECM = $\square$ BCED

Für weitere Beweise sei - neben LOOMIS (1968) - unter anderem auf KRONFELLNER (1997) und KAISER & NÖBAUER (1984) verwiesen.

Doch nicht nur der Pythagoräische Lehrsatz, auch andere Inhalte der Pythagoräischen Lehre können in der Schule, insbesondere in der 3. und 4. Klasse verwendet werden.

3.2 Proportionen

Die Pythagoräer glaubten, dass die Welt aus Gegensätzen bestehe und dass Zahlen und Zahlenverhältnisse in diese Gegensätze Einheit und Ordnung bringen. In dieser Auffassung wurden sie vor allem durch ihre Untersuchungen zur Musiktheorie bestärkt. Sie erkannten nämlich, dass zwei Saiten, die bei gleicher Länge denselben Ton erzeugen, bei verschiedener Länge einen harmonisch klingenden Akkord ergeben, wenn diese Längen in einem einfachen ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen:

1 : 2 ... Oktav,
2 : 3 ... Quint,
3 : 4 ... Quart,
3 : 5 ... große Sext,
4 : 5 ... große Terz,
5 : 6 ... kleine Terz, usw.

Dies motivierte die Pythagoräer zu weiteren Untersuchungen von Proportionen und ähnlichen Beziehungen. Sie erkannten etwa, dass sich zwei Töne mit den Saitenlängen a und b als Außenglieder der Proportion

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

auffassen lassen. Die Zahl $\frac{2ab}{a+b}$ tritt auch in der Beziehung

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

auf, die wiederum für die Anzahlen der Flächen (a), Kanten (b) und Ecken (c) eines Würfels gilt. Die Auffassung, dass dies Anzeichen einer tieferen Weltordnung sind, ist m. E. nachvollziehbar.

Nicht nur die Pythagoräer beschäftigten sich mit solchen Beziehungen, auch später betrachtete z. B. Eratosthenes (276 - 194 v. Chr.) sogenannte Medietäten, d.h. Beziehungen zwischen drei Größen, wie etwa:

$$a - b = b - c \qquad (\Rightarrow b = \frac{a+c}{2})$$

$$a : b = b : c \qquad (\Rightarrow b = \sqrt{ac})$$

$$(a-b):(b-c) = a : c \qquad (\Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c})$$

u. a. m.

4. Klasse

4.1 Bestimmung des Erdumfangs nach Eratosthenes

Diese Aufgabe ist bereits in Schulbüchern zu finden (z.B. LAUB ET AL (1996), S. 222).

4.2 Irrationale Zahlen, Inkommensurabilität

Die Arithmetik der Pythagoräer bestand im Studium der natürlichen Zahlen und ihrer Verhältnisse (d.h. der positiven rationalen Zahlen). Sie versuchten auch, alle kontinuierlichen Größen (Längen, Flächeninhalte, Volumina) mit einer Zahl zu belegen. Genauso wie die Einheit (=1) das gemeinsame Maß aller natürlichen Zahlen ist, nahmen sie an, dass auch kontinuierliche Größen ein gemeinsames Maß haben müssten. Damit könnte man jede kontinuierliche Größe mit einer natürlichen Zahl identifizieren, nämlich mit jener Zahl, die angibt, aus wie vielen Einheiten die Größe besteht.

In heutiger Schreibweise: Zwei Strecken a, b heißen kommensurabel, wenn es eine Strecke s (=das gemeinsame Maß) und natürliche Zahlen k und n gibt, sodass gilt:

$$a = k \cdot s \quad \text{und} \quad b = n \cdot s$$

Außerdem erkannten die Griechen bereits: Sind zwei Strecken a, b kommensurabel, so ist auch a - b (bzw. b - a) mit a und b kommensurabel.
(Beweis: $a = k \cdot s$, $b = n \cdot s \Rightarrow a - b = (k-n) \cdot s$)

Durch mehrfache Anwendung ergibt sich daraus das Verfahren der Wechselwegnahme – besser bekannt unter dem Namen Euklidischer Algorithmus – zur Bestimmung des größten gemeinsamen Maßes zweier Größen bzw. des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen.

Zum Entsetzen der Pythagoräer entdeckten sie, noch dazu an ihrem eigenen „Ordenszeichen", dem Sternfünfeck (auch: Pentagramm, Abb. 4.1), dass es nicht kommensurable Größen gibt. Denn aus dem Verfahren der Wechselwegnahme erkennt man:

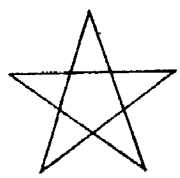


Abb. 4.1

Wenn von zwei Größen immer abwechselnd die kleinere von der größeren weggenommen wird und die übrigbleibende nie die vorhergehende misst, dann sind diese Größen inkommensurabel.

Genau dies tritt beim Sternfünfeck ein:

Angenommen, $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ wären kommensurabel. Dann wäre auch

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{CE'} = \overline{E'C'}$$

mit $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ kommensurabel, und diese sind mit $\overline{E'D'} = \overline{AE'} - \overline{E'C'}$ kommensurabel. Also hätten Seite und Diagonale im großen Fünfeck ABCDE dasselbe gemeinsame Maß wie Seite und Diagonale im Fünfeck A'B'C'D'E'. Nun kann man das gleiche Verfahren auf dieses Fünfeck anwenden, usw. ad infinitum.

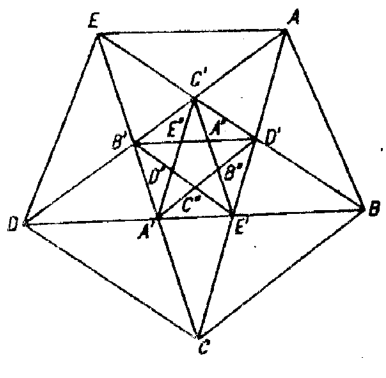


Abb. 4.2

Es kann daher kein gemeinsames Maß für die Seite und die Diagonale des Fünfecks geben. Sie sind inkommensurabel.

Diese Erkenntnis von der Existenz inkommensurabler Strecken zerstörte die wesentliche Säule des pythagoräischen Weltbildes. Man spricht auch von der „ersten Grundlagenkrise der Mathematik".

Die (In-)Kommensurabilität ist in der Schule nicht nur aus historischen Gründen von Bedeutung. Denn die Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks, $A = a \cdot b$, ist nur dann mit elementaren Mitteln begründbar, wenn a und b kommensurabel sind. Um ihre Gültigkeit auch für inkommensurable a, b zu gewährleisten, benötigt man - in irgend einer Form - Grenzprozesse.

4.3 Konstruktion irrationaler Strecken (Pythagoräischer Lehrsatz); die Spirale des Theodoros

Als Ausweg aus der Grundlagenkrise wandten sich die Griechen von der Arithmetik ab und der Geometrie zu. Als geometrische Objekte sind irrationale Größen offensichtlich existent, und die Problematik der Inkommensurabilität stand damit nicht so sehr im Vordergrund. Theodoros (465? - 399? v. Chr.) zeigte auf einfache Weise, wie man Irrationalzahlen $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ der Reihe nach konstruktiv ermitteln kann (Abb. 4.3).

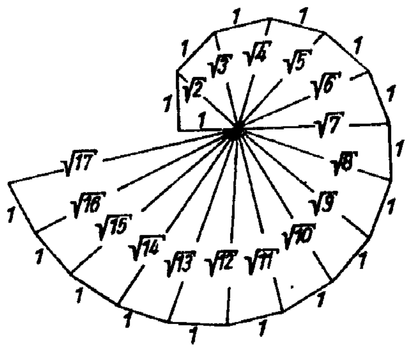


Abb. 4.3

4.4 Die Quadratur des Kreises

Die Quadratur des Kreises ist eines der drei klassischen Probleme der Antike; die anderen beiden sind die Winkeldreiteilung (vgl. Kap. 2.3) und die Würfelverdoppelung (Kap. 4.5). Das Problem lautet: Kann man aus dem Radius bzw. Durchmesser eines Kreises konstruktiv („mit Zirkel und Lineal") ein flächengleiches Quadrat ermitteln?
Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr.) gelang es, durch Kreisbögen begrenzte Flächenstücke („Möndchen des Hippokrates") konstruktiv in ein flächengleiches Quadrat bzw. Dreieck zu verwandeln.

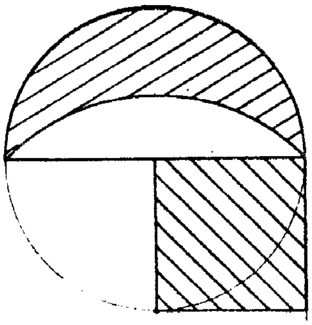


Abb. 4.4

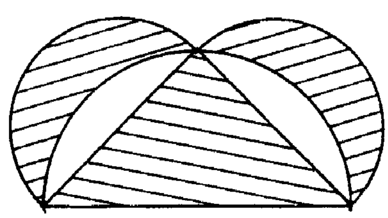


Abb. 4.5

Trotz dieser ermutigenden Ergebnisse gelang es nicht, das Problem der Quadratur des Kreises, also der Konstruktion von π, zu lösen. Es gab zwar „Lösungen" mit Hilfe spezieller Kurven, der Quadratrix oder der Archimedischen Spirale, aber diese Lösungen entsprachen nicht der Forderung nach Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Heute weiß man, dass dieses Problem nicht lösbar ist.

4.5 Das Delische Problem der Würfelverdoppelung

Der Sage nach sollen sich die Delier, als sie von einer Seuche heimgesucht wurden, an ein Orakel gewandt haben, das ihnen auftrug, einen würfelförmigen Altar zu verdoppeln. Dies entspricht also der Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$. Hippokrates formulierte das Problem so: Gegeben sind zwei Strecken a und b. Gesucht sind Strecken x und y, sodass gilt:

$$a : x = x : y = y : b$$

Dabei nennt man x und y auch die mittleren Proportionalen. Aus dieser Proportion erhält man $x^2 = ay$ und $y^2 = bx$ und somit $x^4 = a^2bx$, also $x^3 = a^2b$. Setzt man nun a=1 und b=2, so ergibt sich (in heutiger Schreibweise): $x = \sqrt[3]{2}$.

Beim Versuch, eine konstruktive Lösung dieses Problems zu finden, ersannen die Griechen verschiedene Methoden und vor allem auch „Geräte", die aber wieder nicht der Beschränkung auf Zirkel und Lineal genügten.

4.5.1 Winkelhakenmethode

Ein dreiseitiger Rahmen und ein in diesem verschiebbarer Rahmen werden wie in Abb. 4.6 an ein Achsenkreuz angelegt, wobei $\overline{OA} = a$ und $\overline{OB} = b$ die gegebenen Strecken sind, zu denen die mittleren Proportionalen bestimmt werden sollen. Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke AOK, OKG und OGB gilt:

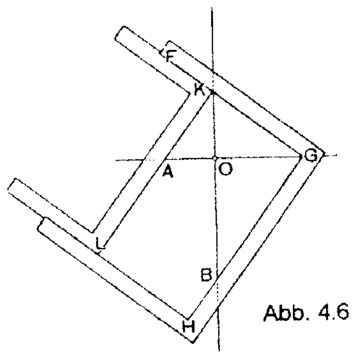


Abb. 4.6

$$\overline{OA}(= a) : \overline{OK} = \overline{OK} : \overline{OG} = \overline{OG} : \overline{OB}(= b)$$

Also sind $x = \overline{OK}$ und $y = \overline{OG}$ die gesuchten mittleren Proportionalen.

4.5.2 Plattenmethode

Eratosthenes ersann folgendes Instrument (Abb. 4. 7):
Drei gleich große rechteckige Platten werden in einem Rahmen so verschoben, dass ein schwenkbarer Stab gerade durch jene Punkte B, C geht, an denen die Diagonalen der nächsten Platte sichtbar werden.

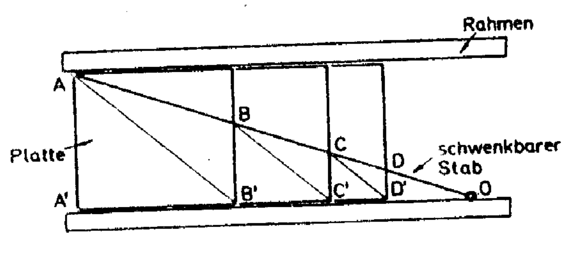


Abb. 4.7

Die Strecken $\overline{AA'} = a$ bzw. $\overline{DD'} = b$ stellen jene Zahlen dar, zu denen die mittleren Proportionalen ermittelt werden sollen. Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke AA´O, BB´O, CC´O und DD´O sowie der Dreiecke AB´O, BC´O und CD´O gilt:

$$\mathbf{\overline{AA'}:\overline{BB'}}=\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{AB'}:\overline{BC'}=\overline{OB'}:\overline{OC'}=$$
$$=\mathbf{\overline{BB'}:\overline{CC'}}=\overline{OB}:\overline{OC}=\overline{BC'}:\overline{CD'}=\overline{OC}:\overline{OD}=\mathbf{\overline{CC'}:\overline{DD'}}$$

Also sind $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ die gesuchten mittleren Proportionalen.

Eine weitere Methode zur Bestimmung der mittleren Proportionalen beruht auf der Anwendung spezieller Kurven, der Konchoide und der Kissoide (auch: Cissoide). Dabei wird zwar auch im Wesentlichen nur mit ähnlichen Dreiecken argumentiert, dennoch dürfte die Definitionen dieser Kurven im regulären Unterricht doch zu weit führen. Näheres dazu findet man u. A. in KAISER & NÖBAUER (1984), S. 141, und in Oettinger (1984) und (1985).

5. Klasse

5.1 Quadratische Gleichungen - Der Goldene Schnitt

Das Sternfünfeck der Pythagoräer beinhaltet noch eine weitere interessante Eigenschaft. Wie man anhand von Abb. 4.2 leicht überlegt, teilt der Punkt B´ die Strecke AD in folgendem Verhältnis:

$$\overline{AD}:\overline{AB'}=\overline{AB'}:\overline{B'D}$$

oder kürzer:

$$a : x = x : (a-x).$$

In Worten: Die ganze Strecke verhält sich zur größeren ihrer beiden Teilstrecken wie die größere zur kleineren.

Diese Proportion bezeichnet man als den „Goldenen Schnitt", ein in der Kunst oft verwendetes, da als besonders ästhetisch empfundenes Teilungsverhältnis. Die Auflösung dieser Proportion führt auf die Gleichung

$$x^2+ax-a^2=0,$$

deren irrationale Lösungen

$$x=\frac{a}{2}\cdot(-1\pm\sqrt{5})$$

letztlich für die Inkommensurabilität (vgl. Kap. 4.2) verantwortlich sind. Näheres zum Goldenen Schnitt siehe etwa BEUTELSPACHER & PETRI (1988).

6. Klasse

6.1 Aufstellen von Summenformeln - Figurierte Zahlen

Wie bereits früher erwähnt, sahen die Pythagoräer in den (natürlichen) Zahlen und Zahlenverhältnissen ein wesentliches Ordnungsprinzip und maßen daher diesen eine geradezu mystische Bedeutung bei. Insbesondere die Tetraktys, die heilige Zehnzahl, ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen (Abb. 6.1).

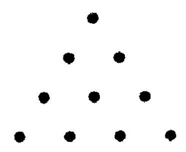
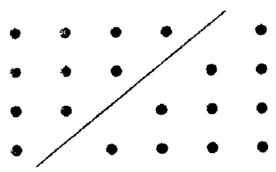


Abb. 6.1

Dies führte zu weiteren Untersuchungen solcher Figuren („figurierte Zahlen") und den in ihnen enthaltenen Gesetzmäßigkeiten. Sie können im Unterricht als heuristisches Hilfsmittel zur Aufstellung bzw. Veranschaulichung von Summenformeln verwendet werden.

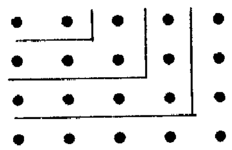
Eine Formel für Dreieckszahlen, also für $\sum_{i=1}^{n} i$, erhält man durch Halbieren von Rechteckszahlen mit n Zeilen und n+1 Spalten:



$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) \cdot n$$

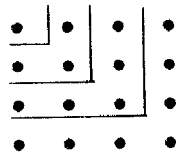
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$$

Rechteckszahlen, anders angeordnet:



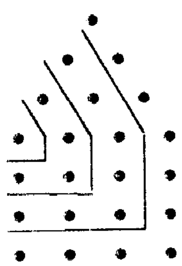
$$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot i = (n+1) \cdot n$$

Eine sehr ähnliche Figur führt zu einer anderen bekannten Formel:



$$\sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1) = n^2$$

Auch Fünfeckszahlen wurden von den Pythagoräern untersucht:



$$\sum_{i=1}^{n} (3 \cdot i - 2) = \frac{1}{2} \cdot (3n-1) \cdot n$$

6.2 Folgen und Reihen - Das Unendliche - Die axiomatische Methode

In vielen Schulbüchern findet man im Kapitel über geometrische Reihen Zenons Paradoxon von Achill und der Schildkröte. Von ähnlicher Art ist das Pfeilparadoxon: Wenn ein Pfeil von einem Punkt A zu einem Punkt B fliegt, so befindet er sich in jedem Augenblick in einem Punkt dazwischen; er „ruht" in jedem Augenblich in diesem Punkt. Der Pfeil „ruht" also in jedem Augenblick, also bewegt er sich gar nicht. (Dieses Paradoxon passt auch sehr gut zum Thema mittlere Geschwindigkeit versus Momentangeschwindigkeit!)

Was steckt hinter diesen Paradoxa? Zenon von Elea (490? - 430? v. Chr.) glaubte natürlich nicht, dass ein Pfeil nicht fliegt. Er widersetzte sich vielmehr der pythagoräischen Lehre, die mit jeder Größe eine Zahl verband. Bei diskreten Größen ist dies ohne Probleme machbar, bei kontinuierlichen Größen wie Längen, Flächeninhalte, Volumina, Zeit aber führt diese Auffassung zu Schwierigkeiten. Zenon wollte mit seinen Paradoxa zeigen, dass man sich Raum und Zeit nicht aus unendlich vielen unteilbaren Bestandteilen zusammengesetzt vorstellen darf.

Die Paradoxa Zenons sind uns durch Aristoteles erhalten worden. Er versucht, diese Aporie (Ausweglosigkeit) dadurch aufzulösen, dass er zwischen dem Unendlichen der Addition und dem Unendlichen der Division unterscheidet. Er behauptet (bzw. postuliert) weiter, dass das Kontinuum (etwa ein Zeitintervall) unbeschränkt teilbar ist, aber dennoch dieses Zeitintervall nicht als Summe von Augenblicken aufgefasst werden darf. (Vgl.: abzählbar unendlich versus überabzählbar unendlich!)

Um sich den Angriffen Zenons und der anderen Sophisten zu entziehen, versuchte Aristoteles eine charakterisierende Beschreibung einer strengen, unanfechtbaren Wissenschaft. Er baute dabei auf Platon auf, der zwar kein Mathematiker war, wohl aber die Mathematik sehr schätzte, mit den führenden Mathematikern seiner Zeit in Verbindung stand und ihre Schlussweisen übernahm. Aristoteles betrachtete Wissenschaft als ein System,

- dessen wahre Aussagen (Sätze) zerfallen in
  a) Grundsätze (Axiome)
  b) bewiesene Lehrsätze (Theoreme)

- und dessen Begriffe zerfallen in
  a) Grundbegriffe
  b) abgeleitete Begriffe

Zum Verhältnis der Theoreme zu den Axiomen hält er fest:
Theoreme sind solche Aussagen, deren Wahrsein sich mittels logischer Schlüsse beweisen lässt und auf dem Wahrsein der unbewiesenen Grundsätze beruht, die selbst „eines Beweises weder fähig noch bedürftig" sind.

Diese Wissenschaftsauffassung wurde in der Mathematik durch Euklids „Elemente", einem der bedeutendsten Bücher der gesamten Kulturgeschichte der Menschheit, umgesetzt. Es beginnt mit folgenden Postulaten:

Gefordert soll sein:

1. dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. dass alle rechten Winkel gleich sind,
5. und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind.

Wir würden heute statt Postulate eher Axiome sagen, aber Euklid versteht unter einem Axiom etwas Anderes. Unmittelbar nach den Postulaten formuliert Euklid seine Axiome, z. B.:

Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.

(siehe EUKLID (1980), S. 3.)

Aus dem zweiten Postulat folgt insbesondere, dass man zum Zeichnen und Verlängern einer Linie ein Lineal verwenden darf. Das dritte Postulat gestattet die Verwendung eines Zirkels (zum Zeichnen von Kreisbögen, nicht zum Übertragen von Streckenlängen!). Daher führen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu mathematischen Erkenntnissen, die auch aus Euklids Postulaten deduzierbar - und damit für Kritiker unangreifbar - sind. Daraus erklärt sich das Bestreben, Konstruktionen zu finden, die nur auf der Verwendung von Zirkel und Lineal beruhen.

Von besonderer Bedeutung ist auch das fünfte Postulat, das auch als Parallelenpostulat bekannt ist. Viele Mathematiker bis ins 18. Jahrhundert vermuteten, dass dieses Postulat aus den anderen Postulaten deduzierbar ist. Erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts erkannten Janos Bolyai (1802 - 1860) und Nikolaj Iwanowitsch Lobatschwski (1792 - 1856), dass das fünfte Postulat tatsächlich von den übrigen unabhängig, also nicht deduzierbar, ist. Diese Erkenntnis beruht auf der Entwicklung anderer Geometrien, sogenannter nichteuklidischer Geometrien, in denen zwar die ersten vier, nicht aber das fünfte Postulat erfüllt sind.

7. Klasse

7.1 Kegelschnitte - Würfelverdoppelung

Das Problem der Würfelverdoppelung führte Menaichmos (um 350 v. Chr.) zu Kegelschnitten. Aus der Proportion

$$a : x = x : y = y : b$$

erhält man

$$xy = ab \text{ und } y^2 = bx.$$

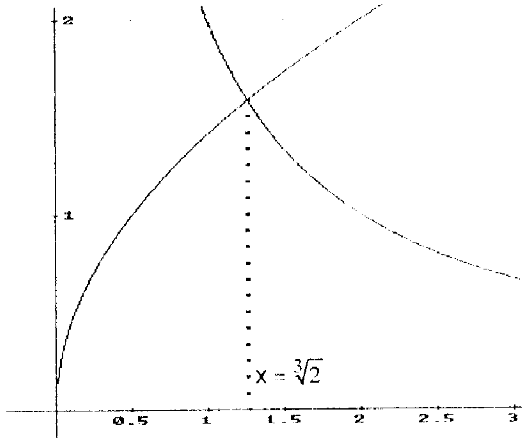


Abb. 7.1

Setzt man nun a=1 und b=2, so ergibt sich

$$y^2 = 2x \text{ und } xy = 2,$$

also eine Parabel und eine Hyperbel, deren Schnitt zur Ermittlung der mittleren Proportionalen x verwendet werden kann:

$$4 = x^2y^2 = x^2 \cdot 2x \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Auch die Namen Ellipse, Hyperbel und Parabel kommen aus dem Griechischen. Eine ausführliche Darstellung, was diese Namen bedeuten und wie sie erklärbar sind, findet man in REICHEL (1991).

7.2 Unmöglichkeits"beweise" für die drei klassischen Probleme

Im Zuge der nichtlinearen analytischen Geometrie kann man die Idee des Beweises, dass $\sqrt[3]{2}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, zumindest plausibel machen. Man kann sich überlegen, dass der Schnitt zweier Kreise oder eines Kreises mit einer Geraden - also ein Konstruktionsschritt mit Zirkel und Lineal - immer auf eine Gleichung vom Grad 2 führt. Mehrere solche Schritte führen auf Gleichungen vom Grad 2^k. Hingegen ist $\sqrt[3]{2}$ Lösung einer Gleichung vom Grad 3 und kann somit nicht mit Zirkel und Lineal konstruktiv ermittelt werden.

Für eine ausführlichere Darstellung sowie auch für die Grundideen der Unmöglichkeitsbeweise der anderen beiden Probleme siehe KAISER & NÖBAUER (1984), S. 148ff.

8. Klasse

8.1 Integralrechnung - Exhaustionsverfahren

Im Zuge der Integralrechnung kann ebenfalls auf die Leistungen der griechischen Mathematiker verwiesen werden. Archimedes (287 - 212 v. Chr.) berechnete Flächeninhalt und Umfang des Kreises, den Flächeninhalt eines Parabelsegments, Oberflächen und Volumina von Zylinder, Kegel, Kugel und Kugelteilen sowie Volumina von Rotationsparaboloiden und -hyperboloiden. Dabei verwendete er unter Anderem das sogenannte Exhaustionsverfahren (der Name stammt erst aus späterer Zeit), das auf dem Exhaustionsprinzip des Eudoxos von Knidos (408? – 355? v. Chr.) beruht, welches im Wesentlichen - in heutiger Sprechweise - eine Aussage über die Konvergenz einer unendlichen geometrischen Reihe macht. Vgl. BÜRGER ET AL. (1992), S. 61f, KAISER & NÖBAUER (1984), S. 163ff.

Literatur

BEUTELSPACHER, A. & PETRI, B. (1988): *Der Goldene Schnitt*. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien Zürich

BÜRGER, H., FISCHER, R., MALLE, G., MÜHLGASSNER, T., KRONFELLNER, M., SCHLÖGLHOFER, F. (1992): *Mathematik Oberstufe* 4. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien

EUKLID (1980): *Die Elemente.* Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt

KAISER, H. & NÖBAUER , W. (1984): *Geschichte der Mathematik.* Hölder-Pichler-Tempsky, Wien

KRONFELLNER, M. (1997): *Historische Aspekte im Mathematikunterricht.* In: Didaktik-Reihe der ÖMG

KRONFELLNER, M. (1998): *Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen.* Hölder – Pichler – Tempsky, Wien

LAUB, J., HRUBY, E., REICHEL, H.-CHR., LITSCHAUER, D., GROß, H. (1996): *Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der höheren Schulen und der Hauptschulen.* Hölder – Pichler – Tempsky, Wien

LOOMIS, E. S. (1968): *The Pythagorean Proposition.* National Council of Teachers of Mathematics, Washington D.C,

OETTINGER, E., Hrsg. (1984): Winkeldrittelung und Konchoide. *mathe-plus* 1, Oktober 1984, S. 8 – 12

OETTINGER, E., Hrsg. (1985): Die Zissoide oder "Efeuartige". *mathe-plus* 3, Februar 1985, S. 4 – 7

REICHEL, H.-CH.: Wie Ellipse, Hyperbel und Parabel zu ihrem Namen kamen und einige allgemeine Bemerkungen zum Thema "Kegelschnitte" im Unterricht *Didaktik der Mathematik* 2, 1991, S. 111 – 130

Univ. Doz. Dr. Manfred Kronfellner
Technische Universität Wien
Institut für Algebra und Diskrete Mathematik
Wiedner Hauptstraße 8-10
A - 1040 Wien
m.kronfellner@tuwien.ac.at